# NMSA334: cvičení 3 – náhodný součet náhodných veličin, proces větvení

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou iid celočíselné nezáporné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ a vytvořující funkcí $P(s)$. Nechť $N$ je celočíselná nezáporná náhodná veličina, nezávislá na posloupnosti $\{X_i\}$, s rozdělením $\{\pi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ a vytvořující funkcí $\Pi(s)$. Definujme $S_0 = 0$ a $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ pro $N \geq 1$. Rozdělení $S_N$ označme $\{h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ a vytvořující funkci $H(s)$.

**Věta 3.1:** Platí $H(s) = \Pi(P(s))$, $\mathrm{E}S_N = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{E}X_1$, $\operatorname{var} S_N = \mathrm{E}N \cdot \operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} N \cdot (\mathrm{E}X_1)^2$.

**Příklad 3.1:** Nechť $\{X_i\}$ je posloupnost iid náhodných veličin, které mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\alpha$. Nechť $N$ je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda$, nezávislá na $\{X_i\}$. Uvažujme náhodný součet $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Určete vytvořující funkci $S_N$, střední hodnotu $\mathrm{E}S_N$ a rozptyl $\operatorname{var} S_N$.

**Příklad 3.2:** Do obchodu přijde za jednu hodinu $N$ zákazníků, kde $N$ má binomické rozdělení s parametry 12 a 1/3. Každý z nich něco koupí s pravděpodobností 2/5. Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl počtu platících (kupujících) zákazníků za jednu hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že za jednu hodinu nepřijde ani jeden platící zákazník?

**Galtonův-Watsonův model větvení**: Uvažujme populaci jedinců, kteří dávají vznik jedincům stejného druhu. Předpokládáme, že chování jedinců jsou navzájem nezávislá. Z každého jedince vznikne v další generaci $k$ nových jedinců s pravděpodobností $p_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Označme $X_n$ počet jedinců v $n$-té generaci. Náhodnou posloupnost $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ nazýváme *Galtonův-Watsonův proces větvení.* Předpokládáme, že na počátku (v nulté generaci) je jeden jedinec (tj. $X_0 = 1$). Potom počet jedinců v první generaci má rozdělení $\{p_n\}$ a vytvořující funkci $P(s)$. Počet jedinců v druhé generaci je $X_2 = U_1 + \ldots + U_{X_1}$, kde $U_i$ jsou iid se stejným rozdělením jako $X_1$. Z věty 3.1 vidíme, že $P_{X_2}(s) = P(P(s))$. Takto postupně dostaneme pro počty jedinců v $n$-té generaci vytvořující funkci $P_{X_n}(s) = P_{X_{n-1}}(P(s)) = P(P_{X_{n-1}}(s))$.

**Věta 3.2:** Nechť $\{X_n\}$ je Galtonův-Watsonův proces větvení. Označme $\mathrm{E}X_1 = \mu$ a $\operatorname{var} X_1 = \sigma^2$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{E}X_n = \mu^n$ a $\operatorname{var} X_n = \sigma^2 \mu^{n-1}(1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1})$.

Označme $\xi_n = P(X_n = 0) = P_{X_n}(0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času $n$. Pak pravděpodobnost, že vůbec někdy vymře, je

$$\xi = P(\cup_n [X_n = 0]) = \lim_{n \to \infty} \xi_n,$$

protože jevy $[X_n = 0]$ jsou neklesající. Vztah $P_{X_n}(s) = P(P_{X_{n-1}}(s))$ pro $s = 0$ znamená $\xi_n = P(\xi_{n-1})$. Ze spojitosti $P$ tak musí platit $\xi = P(\xi)$. Tato rovnice má vždycky řešení $\xi = 1$. Pro $p_0 = 1$ je hledaná pravděpodobnost právě $\xi = 1$, pro $p_0 = 0$ je to $\xi = 0$. Pro $0 < p_0 < 1$ platí následující tvrzení.

**Věta 3.3:** Nechť v Galtonově-Watsonově modelu větvení je $0 < p_0 < 1$. Pokud $\mu \leq 1$, potom $\xi = 1$. Pokud $\mu > 1$, potom $\xi \in (0, 1)$ a je to jediné řešení $P(s) = s$ v intervalu $(0, 1)$.

**Příklad 3.3:** Uvažujme model větvení s $p_0 = 1/5$, $p_1 = 1/5$, $p_2 = 3/5$ a $p_k = 0$ pro $k \geq 3$. Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v $n$-té generaci. Spočtěte pravděpodobnost vymření populace. Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé generaci.

**Definice 3.1:** Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s hodnotami v diskrétní množině $S$ se nazývá *Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů* $S$, jestliže

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ taková, že $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1} \ldots, X_0 = i_0) > 0$. Podmíněné pravděpodobnosti $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ se nazývají *pravděpodobnosti přechodu* ze stavu $i$ v čase $n$ do stavu $j$ v čase $n+1$. Podobně $P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ pro $m \in \mathbb{N}$ se nazývají *pravděpodobnosti přechodu $m$-tého řádu.* Jestliže $p_{ij}(n, n+m)$ nezávisí na časových okamžicích $n$ a $n+m$, ale jen na jejich rozdílu $m$, říkáme, že příslušný Markovův řetězec je *homogenní.*

**Příklad 3.2:** Ověřte, že Galtonův-Watsonův proces větvení je homogenní Markovův řetězec. Jak vypadají pravděpodobnosti přechodu? Vyjádřete pravděpodobnosti přechodu ze stavů 0, 1 a 2 pro případ z příkladu 3.1.

## NMSA334: cvičení 4 – klasifikace stavů, Perronův vzorec

**Příklad 4.1:** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec s diskrétní množinou stavů $S$. Dokažte, že

$$\begin{aligned} &P(X_{m+n} = k_n, X_{m+n-1} = k_{n-1}, \dots, X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) \\ &= P(X_n = k_n, X_{n-1} = k_{n-1}, \dots, X_1 = k_1 \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

pro každé $i, k_1, \dots, k_n \in S$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$.

**Klasifikace stavů:** V každém homogenním Markovově řetězci můžeme rozlišit *trvalé* (s pravděpodobností 1 se po konečně mnoha krocích vrátíme) a *přechodné* (s kladnou pravděpodobností se nevrátíme) stavy. U trvalých stavů navíc rozlišujeme *nenulové* (střední doba prvního návratu je konečná) a *nulové* (střední doba prvního návratu je nekonečná) stavy. Další možné dělení je na *periodické* a *neperiodické* stavy.

Označíme-li $p_{jj}^{(n)}$ pravděpodobnost přechodu $n$-tého řádu ze stavu $j$ do stavu $j$, pak pro stav $j$ platí, že je:

(i) trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$,

(ii) trvalý nulový právě tehdy, když $p_{jj}^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

(iii) periodický právě tehdy, když $d_j = \mathrm{NSD}\{n \in \mathbb{N} : p_{jj}^{(n)} > 0\} > 1$.

**Věta 4.1 (Perronův vzorec):** Nechť $A$ je čtvercová matice, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \dots, m_k$. Pak platí

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{\mathrm{d}^{m_j-1}}{\mathrm{d}\lambda^{m_j-1}} \left[ \frac{\lambda^n \operatorname{Adj}(\lambda I - A)}{\psi_j(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_j},$$

kde $\psi_j(\lambda) = \frac{\det(\lambda I - A)}{(\lambda-\lambda_j)^{m_j}}$.

**Příklad 4.2:** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{-1, 0, 1\}$. Uvažujme posloupnost $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ukažte, že se jedná o homogenní Markovův řetězec. Určete matice pravděpodobností přechodu všech řádů. Klasifikujte stavy řetězce $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$.

**Příklad 4.3:** Mějme neomezenou zásobu kuliček a $k$ přihrádek. V každém kroku jednu kuličku náhodně vložíme do jedné z přihrádek. Nechť $X_n$ označuje počet obsazených přihrádek v čase $n$. Ukažte, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec, určete matici pravděpodobností přechodu a klasifikujte stavy řetězce.

**Příklad 4.4:** Je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. jde o náhodnou procházku na trojúhelníku. Spočtěte $\mathbb{P}^n$. Klasifikujte stavy řetězce.

**Příklad 4.5:** Uvažujme Markovův řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $0 < a, b < 1$. Spočtěte $\mathbb{P}^n$. Určete rozdělení časů prvního návratu do stavů 0 a 1. Pomocí obdržených výsledků klasifikujte stavy řetězce.